

Adrian ZANOSCHI
Gheorghe IUREA
Gabriel POPA

matematică

**algebră
geometrie**

clasa a VII-a

ediția a IV-a

mate 2000 – standard

Editura Paralela 45

PROBLEME RECAPITULATIVE CLASA A VI-A

ALGEBRĂ

1. Se consideră mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 7 < 3x - 2 < 28\}$ și $B = \{y \in \mathbb{N} \mid y = n^2, n \in \mathbb{N}, n \leq 3\}$. Determinați $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ și $B \setminus A$.
2. Determinați mulțimile X și Y , știind că $X \cup Y = \{1, 3, 4, 5, 7, 9, 10\}$, $X \cap Y = \{5, 7, 9\}$ și $X \setminus Y = \{1, 10\}$.
3. Fie A și B două mulțimi, astfel încât $\text{card}(A) = 25$, $\text{card}(B) = 36$ și $\text{card}(A \cap B) = 20$. Aflați $\text{card}(A \cup B)$.
4. Fie mulțimea $A = \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$.
 - a) Scrieți toate submulțimile mulțimii A care au două elemente și suma acestora este număr impar.
 - b) Câte submulțimi cu cinci elemente are A ?
 - c) Câte submulțimi are, în total, mulțimea A ?
5. Descompuneți în factori primi numerele naturale: $a = 72$, $b = 75$, $c = 91$ și $d = 138$. Care dintre aceste numere are mai mulți divizori naturali?
6. Determinați cel mai mare număr natural n , astfel încât 5^n să dividă numărul $a = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 49 \cdot 50$.
7. Fie numerele naturale $a = 168$ și $b = 180$. Calculați cel mai mare divizor comun al numerelor a și b și cel mai mic multiplu comun al lor.
8. Aflați câți divizori comuni au numerele 126 și 420.
9. Numerele 248 și 107, împărțite la numărul natural nenul n , dau resturile 14, respectiv 17. Aflați numărul n .
10. Scrieți toți multiplii comuni ai numerelor 24 și 36 care sunt mai mici decât 300.
11. Aflați care este cel mai mic număr de elevi care se pot alinia în coloane de câte 8 elevi, de câte 12 elevi și de câte 18 elevi.
12. Ana are mai multe mere. Dacă le grupează câte trei sau câte patru, îi rămâne, de fiecare dată, câte un măr în plus. Dacă taie fiecare măr în patru, obține mai puțin de 100 de felii. Câte mere are Ana?
13. a) Dintr-o clasă cu 28 de elevi, fetele reprezintă 25%. Aflați câți băieți sunt în clasă.
b) Dacă într-o clasă sunt 6 băieți și ei reprezintă 20% din numărul total de elevi, aflați câți elevi sunt în clasa respectivă.

TESTE ÎNȚIALE

Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 50 de minute.

TESTUL 1

Partea I. Scrieți doar litera corespunzătoare răspunsului corect.

(4 puncte)

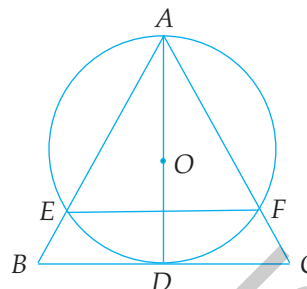
- (0,5p) 1. Rezultatul calculului $6 - 12 : 3 - 4$ este:
A. -6 B. -2 C. 4 D. 0
- (0,5p) 2. Prețul unui calculator este 2800 lei. După o reducere cu 20%, prețul acestuia devine:
A. 2200 lei B. 2000 lei C. 2240 lei D. 2600 lei
- (0,5p) 3. Dacă $a \in \mathbb{Z}$ și $-9 < a + 1 < -7$, atunci a este egal cu:
A. -10 B. -9 C. -8 D. -7
- (0,5p) 4. Ioana a cumpărat de la magazin o pâine de 2,50 lei și 2 kg de cartofi de 2,40 lei kilogramul. Pentru cumpărăturile făcute, Ioana a plătit:
A. 4,90 lei B. 7,30 lei C. 7,50 lei D. 6,50 lei
- (0,5p) 5. Lungimea laturii unui triunghi echilateral cu perimetrul de 12,6 m este egală cu:
A. 4 m B. 12,6 m C. 6,3 m D. 4,2 m
- (0,5p) 6. Complementul unui unghi de 35° are măsura egală cu:
A. 55° B. 65° C. 90° D. 145°
- (0,5p) 7. Un triunghi isoscel are măsura unghiului opus bazei de 20° . Fiecare dintre unghiurile alăturate bazei sale are măsura de:
A. 20° B. 50° C. 70° D. 80°
- (0,5p) 8. Un triunghi dreptunghic are catetele egale cu 6 cm și 8 cm. Lungimea ipotenuzei triunghiului este egală cu:
A. 8 cm B. 9 cm C. 10 cm D. 14 cm

Partea a II-a. La următoarele probleme se cer rezolvările complete.

(5 puncte)

- (1p) 1. Rezolvați ecuația: $12 - 2(3x - 1) = -4$, $x \in \mathbb{Z}$.
- (1p) 2. Fie $a, b \in \mathbb{Q}^*$, astfel încât $\frac{3a+2b}{a+7b} = \frac{12}{23}$. Determinați valoarea raportului $\frac{a}{b}$.
- (1p) 3. Se consideră triunghiul isoscel ABC cu baza BC și $m(\angle A) = 30^\circ$. Dacă BD este înălțimea din B a triunghiului ABC ($D \in AC$), determinați măsura unghiului CBD .

4. În figura alăturată, ABC este un triunghi echilateral, D este mijlocul laturii BC , iar E și F sunt punctele în care cercul cu diametrul AD și centrul O intersectează laturile AB , respectiv AC .



(1p) a) Determinați măsura arcului mic $\widehat{AE}$ al cercului $\mathcal{C}(O)$ și arătați că cercul este tangent dreptei BC .

(1p) b) Arătați că dreptele BC și EF sunt paralele.

TESTUL 2

Partea I. Scrieți doar litera corespunzătoare răspunsului corect.

(4 puncte)

(0,5p) 1. Rezultatul calculului $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ este:

- A. $\frac{2}{3}$ B. 1 C. $\frac{11}{12}$ D. $\frac{37}{36}$

(0,5p) 2. Dacă $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$, atunci numărul $3a - 2b - 1$ este egal cu:

- A. 0 B. 1 C. -1 D. -2

(0,5p) 3. Soluția ecuației $x : 2 + 1 = 0$ este:

- A. 4 B. $\frac{1}{2}$ C. -2 D. $-\frac{1}{2}$

(0,5p) 4. Iulia rezolvă tema la matematică în jumătate de oră și tema la engleză într-un sfert de oră. În total, ea a lucrat la teme timp de:

- A. 45 minute B. 60 minute C. 75 minute D. 90 minute

(0,5p) 5. Diametrul unui cerc are lungimea de 4 cm. Raza acelui cerc are lungimea de:

- A. 8 cm B. 1 cm C. 2 cm D. 16 cm

(0,5p) 6. În jurul punctului O se formează unghiurile $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$, $\sphericalangle COD$ și $\sphericalangle DOA$. Primele trei unghiuri au măsurile 30° , 150° , respectiv 72° . Măsura unghiului $\sphericalangle DOA$ este:

- A. 118° B. 108° C. 98° D. 128°

(0,5p) 7. Dacă $\triangle ABC \equiv \triangle MNP$ și $AC = 12$ cm, atunci lungimea segmentului MP este:

- A. 2 cm B. 10 cm C. 12 cm D. 24 cm

(0,5p) 8. În triunghiul dreptunghic ABC , AD este bisectoarea corespunzătoare ipotenuzei. Măsura unghiului $\sphericalangle DAC$ este:

- A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°

CAPITOLUL I MULTIMEA NUMERELOR REALE

I.1. RĂDĂCINA PĂTRATĂ A UNUI NUMĂR NATURAL PĂTRAT PERFECT. CALCULUL RĂDĂCINII PĂTRATE A UNUI NUMĂR NATURAL PĂTRAT PERFECT



Pătratul unui număr natural n este numărul $n^2 = n \cdot n$. Un număr de forma n^2 , cu $n \in \mathbb{N}$, se numește **număr natural pătrat perfect**.

Exemple: $0 = 0^2$, $1 = 1^2$, $4 = 2^2$, $9 = 3^2$, $16 = 4^2$ etc. sunt numere naturale pătrate perfecte.

DEFINIȚIE: **Rădăcina pătrată** a unui număr natural pătrat perfect x (sau *radical* din x) este numărul natural y al cărui pătrat este x , adică $x = y^2$.

Pentru a desemna rădăcina pătrată folosim simbolul $\sqrt{\quad}$.

Exemple: $\sqrt{0} = 0$; $\sqrt{1} = 1$; $\sqrt{4} = 2$; $\sqrt{9} = 3$ etc.

Observații:

$$1. \quad 3 \xrightleftharpoons[\text{rădăcină pătrată}]{\text{pătrat}} 9$$

2. Dacă $x, y \in \mathbb{N}$, atunci $\sqrt{x} = y \Leftrightarrow x = y^2$.

3. În mulțimea numerelor întregi ($\mathbb{Z}$) există două numere care ridicate la pătrat dau, de exemplu, 9, aceste numere fiind -3 și 3 . Prin definiție, rădăcina pătrată a lui 9 este numărul pozitiv 3. Deci, $\sqrt{9} \neq -3$.

Vom prezenta, în continuare, **două metode de calcul a rădăcinii pătrate** a unui număr natural pătrat perfect.

M1. Descompunerea numărului considerat în factori primi

Exemple: 1) $1024 = 2^{10} = (2^5)^2 \Rightarrow \sqrt{1024} = 2^5 = 32$;

2) $13689 = 3^4 \cdot 13^2 = (3^2 \cdot 13)^2 \Rightarrow \sqrt{13689} = 3^2 \cdot 13 = 117$.

M2. Algoritmul de extragere a rădăcinii pătrate

Pentru a ilustra metoda, vom calcula $\sqrt{18225}$.

I. $\sqrt{1 \mid 82 \mid 25}$

Despărțim numărul în grupe de câte două cifre, de la dreapta la stânga.

II.
$$\begin{array}{r|l} \sqrt{1 \mid 82 \mid 25} & 1 \\ \underline{1} & \\ = & \end{array}$$

Căutăm cel mai mare număr natural al cărui pătrat este mai mic sau egal cu 1. Scriem acest număr, 1, în dreapta sus, iar pătratul său $1^2 = 1$ îl așezăm sub 1 (stânga) și efectuăm scăderea.

III.
$$\begin{array}{r|l} \sqrt{1 \mid 82 \mid 25} & 1 \\ \underline{1} & 2 \\ = 8.2 & \end{array}$$

Coborâm, în stânga, grupa următoare (82) și despărțim ultima cifră cu un punct, iar în dreapta coborâm dublul lui 1, adică 2.

IV.
$$\begin{array}{r|l} \sqrt{1 \mid 82 \mid 25} & 13 \\ \underline{1} & \underline{24 \cdot 4 = 96} \\ = 8.2 & 23 \cdot 3 = 69 \\ \underline{69} & \\ 13 & \end{array}$$

Împărțim pe 8 la 2, obținem câtul 4. Așezăm pe 4 la dreapta lui 2 și înmulțim numărul astfel format cu 4: $24 \cdot 4 = 96$. Cum $96 > 82$, reluăm operația anterioară cu predecesorul lui 4, care este 3: $23 \cdot 3 = 69 < 82$. Scriem 69 sub 82 (în stânga) și facem scăderea. Pe 3 îl scriem în dreapta sus, lângă 1.

V.
$$\begin{array}{r|l} \sqrt{1 \mid 82 \mid 25} & 135 \\ \underline{1} & \underline{24 \cdot 4 = 96} \\ = 8.2 & 23 \cdot 3 = 69 \\ \underline{69} & 265 \cdot 5 = 1325 \\ 132.5 & \\ \underline{1325} & \\ = = = & \end{array}$$

Coborâm, în stânga, următoarea grupă și despărțim ultima cifră printr-un punct. În dreapta coborâm dublul lui 13 ($13 \cdot 2 = 26$). Numărul 26 se cuprinde în 132 de cinci ori. Trecem pe 5 în dreapta lui 26 și înmulțim rezultatul cu 5, astfel: $265 \cdot 5 = 1325$. Diferența din stânga este zero. Scriem în dreapta sus, lângă 13, pe 5.

Algoritmul este astfel încheiat, iar $\sqrt{18225} = 135$.

PROBLEME REZOLVATE

1. Calculați: $\sqrt{324}$, $\sqrt{5184}$ și $\sqrt{10 \cdot 2^3 \cdot 5^5}$.

Soluție: Vom descompune numerele de sub radicali în factori primi. Astfel, obținem:

$$\sqrt{324} = \sqrt{2^2 \cdot 3^4} = \sqrt{(2 \cdot 3^2)^2} = 2 \cdot 3^2 = 18,$$

$$\sqrt{5184} = \sqrt{2^6 \cdot 3^4} = \sqrt{(2^3 \cdot 3^2)^2} = 2^3 \cdot 3^2 = 72,$$

$$\sqrt{10 \cdot 2^3 \cdot 5^5} = \sqrt{2^4 \cdot 5^6} = \sqrt{(2^2 \cdot 5^3)^2} = 2^2 \cdot 5^3 = 500.$$

2. Determinați numărul natural n , știind că $n = \sqrt{16 \cdot 3^{10} + 3^{12}}$.

Soluție: Cum $16 \cdot 3^{10} + 3^{12} = 3^{10} \cdot (16 + 9) = 3^{10} \cdot 25 = (3^5 \cdot 5)^2$, rezultă că $n = 3^5 \cdot 5 = 1215$.

3. Determinați numărul natural x , știind că $\sqrt{2x+1} - 3 = 12$.

Soluție: Deoarece $\sqrt{2x+1} = 15$, înseamnă că $2x + 1 = 15^2$, deci $2x = 224$ sau $x = 112$.

4. Determinați cifrele a, b, x, y , pentru care $\sqrt{4ab} = \overline{xy}$.

Soluție: Evident, dacă extragem radicalul din $\sqrt{4ab}$, obținem un număr de două cifre, cu prima cifră 2, deci $x = 2$. Deoarece $20^2 = 400$, $21^2 = 441$, $22^2 = 484$, iar $23^2 = 529$, rezultă că $a = b = 0$ și $y = 0$ sau $a = 4$, $b = 1$ și $y = 1$ sau $a = 8$, $b = 4$ și $y = 2$.

PROBLEME PROPUSE

1. Determinați pătratele următoarelor numere naturale: 11, 12, 13, 14, 15, 20 și 160.

2. Ridicați la pătrat următoarele numere și scrieți de fiecare dată rezultatul ca produs de puteri ale unor numere prime: 2^5 , $2^3 \cdot 3$, $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$, $3^{11} \cdot 5^7$, $2^n \cdot 7^{2n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$).

3. Scrieți toate numerele naturale pătrate perfecte cuprinse între 200 și 500.

4. Arătați că următoarele numere naturale sunt pătrate perfecte:

a) $25, 36, 81, 100, 900$;

b) $5^4, 2^6, 12^{10}, 6^{2n}, 13^{4n+6}$ ($n \in \mathbb{N}$).

5. Arătați că următoarele numere naturale sunt pătrate perfecte:

a) $3^2 + 4^2$;

b) $3^2 + 4^2 + 12^2$;

c) $3^7 + 3^6$;

d) $2^{11} - 2^{10}$;

e) $2 \cdot 3^3 \cdot 6^5$;

f) $3^3 \cdot 12^5$.

6. Efectuați următoarele calcule și scrieți rezultatul sub formă de pătrat perfect:

a) $3 \cdot (3 \cdot 29 + 91 : 7 - 52)$;

b) $1 + 3 + 5 + \dots + 49$;

c) $2^{51} + 7 \cdot 2^{50}$;

d) $9^{30} : 3^{11} + 10 \cdot 3^{48} - 3^{50}$.

7. Determinați câte elemente are mulțimea $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ este pătrat perfect și } x \leq 1000\}$.

8. a) Care poate fi ultima cifră a pătratului unui număr natural?

b) Arătați că, dacă n este un număr natural, atunci numerele naturale $5n + 2$ și $5n + 7$ nu sunt pătrate perfecte.

RECAPITULARE ȘI SISTEMATIZARE PRIN TESTE

Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 50 de minute.

TESTUL 1

- (1p) 1. Arătați că $a = \sqrt{18} : \sqrt{2} + \sqrt{9^2 + 12^2}$ este număr natural.
- (1p) 2. Care este cel mai mic număr natural pătrat perfect divizibil cu 3, 4, 5 și 6?
- (1p) 3. Un dreptunghi cu lungimea de două ori mai mare decât lățimea are aria egală cu 288 m². Aflați câți metri are perimetrul său.
- (1p) 4. Determinați $x \in \mathbb{Z}$ astfel încât $4\sqrt{12} - \sqrt{27} + \sqrt{75} = x\sqrt{3}$.
- (1p) 5. Care dintre elementele mulțimii $A = \left\{-13; -\frac{1}{2}; 2, (3); \sqrt{18}; 7; \sqrt{64}\right\}$ este număr irațional?
- (1p) 6. Fie $a = (\sqrt{15})^2 + \sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} - \sqrt{3}) + (\sqrt{18} - \sqrt{3}) : \sqrt{3}$. Calculați $\sqrt{a}$.
- (1p) 7. Calculați diferența dintre media aritmetică și media geometrică a numerelor $a = 5$ și $b = 45$.
- (1p) 8. Determinați $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $(x - \sqrt{2})^2 = 8$.
- (1p) 9. Determinați numărul $x = 16 + 4 \cdot \left\{2 + \sqrt{2} \cdot \left[\sqrt{2} + 3 \cdot (\sqrt{27} - 3\sqrt{3})\right] - 7^0\right\} : (-1)^7$.

TESTUL 2

- (1p) 1. Dovediți că $a = \sqrt{\frac{1}{4}} + \sqrt{\frac{1}{9}} + \sqrt{\frac{49}{36}}$ este număr natural.
- (1p) 2. Determinați numărul real x , știind că $\frac{x}{2\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{x}$.
- (1p) 3. Fie $a = |3 - \sqrt{5}| + |\sqrt{5} + \sqrt{3}| + |\sqrt{3} - 2|$. Calculați $(a - 7)^6$.
- (1p) 4. Determinați numărul întreg x , știind că $x - 1 < -\sqrt{3} < x$.
- (1p) 5. Pentru o demonstrație de gimnastică, 6250 de elevi din câteva școli au fost aranjați pe mai multe rânduri, astfel încât numărul de elevi din fiecare rând să fie egal cu numărul total de rânduri. Procedând astfel, organizatorul a constatat că 9 elevi au rămas în afara formației. Aflați numărul elevilor de pe un rând.

CAPITOLUL II

ECUAȚII ȘI SISTEME DE ECUAȚII LINIARE

II.1. TRANSFORMAREA UNEI EGALITĂȚI ÎNTR-O EGALITATE ECHIVALENTĂ. IDENTITĂȚI



Proprietăți ale relației de egalitate în mulțimea numerelor reale

I. Dacă a și b sunt numere reale, atunci:

1. $a = b \Leftrightarrow a + c = b + c, \forall c \in \mathbb{R};$
2. $a = b \Leftrightarrow a - c = b - c, \forall c \in \mathbb{R};$
3. $a = b \Leftrightarrow a \cdot c = b \cdot c, \forall c \in \mathbb{R}^*;$
4. $a = b \Leftrightarrow a : c = b : c, \forall c \in \mathbb{R}^*;$

II. Dacă a, b, c, d sunt numere reale, atunci:

1. $a = b$ și $c = d \Rightarrow a + c = b + d;$
2. $a = b$ și $c = d \Rightarrow a - c = b - d;$
3. $a = b$ și $c = d \Rightarrow a \cdot c = b \cdot d;$
4. $a = b$ și $c = d \neq 0 \Rightarrow a : c = b : d.$

PROBLEME REZOLVATE

1. Considerăm propoziția: „Dacă a, b, c sunt numere reale și $a = b$, atunci $ac = bc$ ”. Stabiliți dacă reciproca acestei propoziții este adevărată.

Soluție: Reciproca este falsă. De exemplu, pentru $a = 1, b = 2, c = 0, ac = bc$ și $a \neq b$.

2. Fie a, b, c numere reale, astfel încât $a = 2$ și $a^2 + ab + ac = 12$. Determinați $3a - 4b - 4c$ și $a^2 - 2ab - 2bc$.

Soluție: Din relațiile date rezultă $4 + 2b + 2c = 12$ sau $2(b + c) = 8$, deci $b + c = 4$. Avem $3a - 4b - 4c = 3a - 4(b + c) = 6 - 16 = -10$ și $a^2 - 2ab - 2bc = 4 - 4b - 4c = 4 - 4(b + c) = 4 - 16 = -12$.

3. Fie a, b numere reale. Arătați că următoarele egalități sunt echivalente.

- | | |
|-------------------------------------|-------------------------|
| a) $7a = 3b + 21;$ | b) $7a + 9 = 3b + 30;$ |
| c) $\frac{a}{3} = \frac{b}{7} + 1;$ | d) $4a = 3(b - a + 7);$ |
| e) $a(b - 7) - b(a - 3) = -21.$ | |

Soluție: Avem: $7a = 3b + 21 \mid +9 \Leftrightarrow 7a + 9 = 3b + 30$, deci $a \Leftrightarrow b$; $7a = 3b + 21 \mid : 21 \Leftrightarrow \frac{a}{3} = \frac{b}{7} + 1$, deci $a \Leftrightarrow c$; $7a = 3b + 21 \mid -3a \Leftrightarrow 4a = 3(b - a + 7)$, deci $a \Leftrightarrow d$; $e \Leftrightarrow ab - 7a - ba + 3b = -21 \Leftrightarrow -7a + 3b = -21 \mid \cdot (-1) \Leftrightarrow 7a - 3b = 21 \mid + 3b \Leftrightarrow 7a = 3b + 21$, deci $a \Leftrightarrow e$.

4. Arătați că $E = -3(x - y) + x(y + 2) - y(x - 1) - 5(y - 1) = 3$, pentru orice x, y numere reale ce verifică condiția $x + y = 2$.

Soluție: $E = -3x + 3y + xy + 2x - xy + y - 5y + 5 = -x - y + 5 = -(x + y) + 5 = -2 + 5 = 3$.

PROBLEME PROPUSE

- Dacă $a = 1440$ și $b = 3780$, arătați că:
a) $21a = 8b$; b) $ab = 2^7 \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7$; c) $a : b = 8 : 21$.
- Fie a, b, c numere reale, astfel încât $a + 2b = 7$, $4b + 3c = 11$. Calculați $5a + 22b + 9c$.
- Dacă a, b, c sunt numere reale, astfel încât $3a + b = 7$ și $5b - 4c = 1$, calculați:
 $12a - 11b + 12c$.
- Fie a, b numere reale, astfel încât $3a + 2 = 5b$. Arătați că:
a) $3a - 1 = 5b - 3$; b) $\frac{a}{5} + \frac{2}{15} = \frac{b}{3}$;
c) $3ab + 2b = 5b^2$; d) $9a^2 + 6a = 15ab$.
- Dacă x, y sunt numere reale și $x - 2y = 0$, calculați $2x^2 - 3xy - 2y^2$.
- Dacă $x, y \in \mathbb{R}^*$ și $2x = 3y$, calculați: $6x - 9y - 2$, $\frac{3x}{y} - 5$ și $\frac{x^2 - y^2}{xy}$.
- Dacă $x, y \in \mathbb{R}$, astfel încât $2x - 5y = 3y - 4x$, calculați $(-3x + 4y - 1)^7$.
- Fie x, y numere reale, $y \neq 0$, astfel încât $4x + 3y = 0$. Calculați $\frac{2x - y}{x - 3y}$.
- Dacă $x, y \in \mathbb{R}^*$ și $2x \neq y$ și $\frac{5x + 2y}{2x - y} = 0,75$, calculați $\frac{x}{y}$.
- Considerăm propoziția: „Dacă $a = b$ și $c = d$, atunci $ac = bd$.” Studiați dacă reciproca propoziției este adevărată sau falsă.
- Fie a, b, c numere reale, astfel încât $a + b = 7$, $b + c = 41$, $c + a = 20$. Calculați $a + b + c$.
- Fie a, b, c numere reale pozitive, astfel încât $ab = 6$, $bc = 10$, $ac = 15$. Calculați abc .
- Dacă a, b, c sunt numere reale astfel încât $5a + 6b + 7c = 58$ și $7a + 6b + 5c = 62$, arătați că $a + b + c = 10$ și $a - c = 2$.
- Dacă a, b, c sunt numere reale și $c^2 + ac + bc = 60$, $c = 5$, arătați că $a + b = 7$ și calculați:
 $3c + 5a + 5b$, $c^2 - 2ac - 2bc$, $(a - 5)(b - c)(c - 5)$.

CAPITOLUL III

ELEMENTE DE ORGANIZARE A DATELOR

III.1. DATE STATISTICE – RECAPITULARE ȘI COMPLETĂRI. POLIGONUL FRECVENȚELOR

O serie de date statistice poate fi **descrisă** printr-un tabel de forma:

x	x_1	x_2	...	x_k
n	n_1	n_2	...	n_k

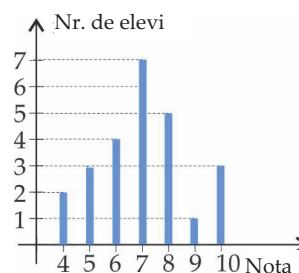
unde $x_1, x_2, \dots, x_k$, sunt valorile care caracterizează un anumit fenomen, iar $n_1, n_2, \dots, n_k$ indică **frecvențele** fiecăreia dintre valorile $x_1, x_2, \dots, x_k$.

Seriile statistice pot fi reprezentate prin tabele, diagrame (cu bare, circulare), printr-un grafic sau folosind poligonul frecvențelor. Vom descrie aceste modalități de reprezentare în problemele rezolvate mai jos.

PROBLEME REZOLVATE

1. Notele obținute la teză de către elevii unei clase sunt cele din diagrama alăturată.

- Câți elevi sunt în clasă? Câți dintre ei au obținut note cel puțin egale cu 9?
- Care este nota cu cea mai mare frecvență?
- Calculați media clasei la matematică.



Soluție: a) Numărul elevilor din clasă este $2 + 3 + 4 + 7 + 5 + 1 + 3 = 25$.

Dintre aceștia, $1 + 3 = 4$ elevi au obținut note cel puțin egale cu 9.

b) Nota cu cea mai mare frecvență este 7 (iar frecvența acesteia este 7).

c) Suma notelor este $4 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 4 + 7 \cdot 7 + 8 \cdot 5 + 9 \cdot 1 + 10 \cdot 3 = 175$. Media clasei este $175 : 25 = 7,00$.

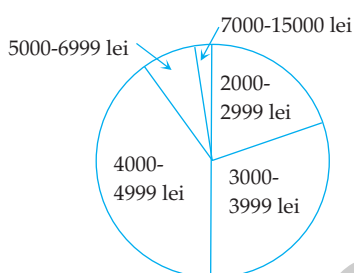
2. În tabelul de mai jos este descrisă distribuția angajaților dintr-o întreprindere după salariul brut pe care îl primesc:

Salariul brut lunar (lei)	Numărul de angajați
2000 – 2999	200
3000 – 3999	300
4000 – 4999	400
5000 – 6999	75
7000 – 15000	25

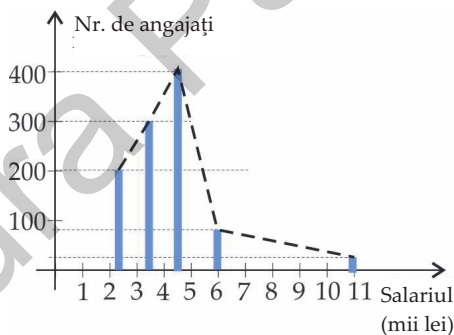
Reprezentați distribuția angajaților, utilizând:

- o diagramă circulară;
- o diagramă cu bare (folosiți valoarea centrală a fiecărei clase de salarizare pe axa orizontală);
- poligonul frecvențelor.

Soluție: a) Unghiurile la centru corespunzătoare celor cinci sectoare ale reprezentării sunt: $\frac{200}{1000} \cdot 360^\circ = 72^\circ$; $\frac{300}{1000} \cdot 360^\circ = 108^\circ$; $\frac{400}{1000} \cdot 360^\circ = 144^\circ$; $\frac{75}{1000} \cdot 360^\circ = 27^\circ$, respectiv $\frac{25}{1000} \cdot 360^\circ = 9^\circ$. Diagrama circulară este cea din figura de mai jos.



b), c) Valorile centrale ale claselor de salarizare sunt 2500 lei, 3500 lei, 4500 lei, 6000 lei, respectiv 11000 lei. Diagrama cu bare este cea din figura de mai jos, iar poligonul frecvențelor este reprezentat cu linie întreruptă.



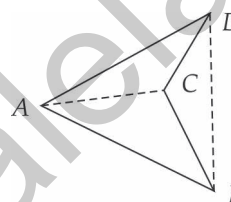
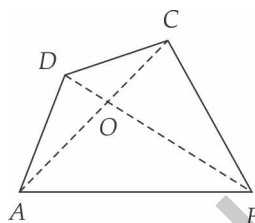
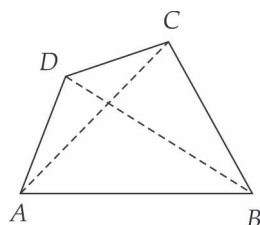
CAPITOLUL IV PATRULATERUL



IV.1. PATRULATERUL CONVEX

Elemente:

- laturi: segmentele AB , BC , CD ; DA ;
- diagonale: segmentele AC , BD ;
- unghiuri: $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$, $\sphericalangle D$.



Patrulater convex: ambele diagonale se află în interiorul patrulaterului.

Patrulater concav: una dintre diagonale se află în exteriorul patrulaterului.

Teoremă: Suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex este 360° .

PROBLEME REZOLVATE

1. Se consideră $ABCD$ un patrulater convex în care $AB = AD = 3$ cm, $BC = 4$ cm, $\sphericalangle ADB = 60^\circ$ și $\sphericalangle CBD = 90^\circ$ (fig. 1).

- Determinați măsurile unghiurilor $\sphericalangle A$ și $\sphericalangle B$.
- Aflați perimetrul patrulaterului.
- Desenați patrulaterul $ABCD$.

Soluție: a) Triunghiul ABD este isoscel și are un unghi de 60° , deci este echilateral; rezultă că $BD = 3$ cm, iar $\sphericalangle A = \sphericalangle ABD = 60^\circ$. Astfel, $\sphericalangle B = \sphericalangle ABD + \sphericalangle CBD = 150^\circ$.

b) Cu teorema lui Pitagora în triunghiul BCD , obținem $CD = 5$ cm. Deducem că $\mathcal{P}_{ABCD} = AB + BC + CD + DA = 15$ cm.

c) Folosind compasul, desenăm triunghiul echilateral ABD cu latura de 3 cm. În exteriorul acestuia, folosind echerul, desenăm triunghiul dreptunghic BCD , $\sphericalangle B = 90^\circ$, cu $BC = 4$ cm. Patrulaterul $ABCD$ este cel căutat.

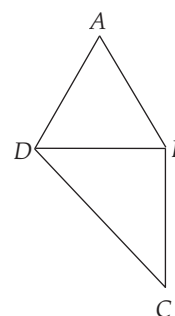


Fig. 1

2. Notăm cu M mulțimea unghiurilor ascuțite ale unui patrulater convex. Câte elemente poate avea mulțimea M ?

Soluție: Există patrulatere cu 0 unghiuri ascuțite (cele cu unghiurile $90^\circ, 90^\circ, 90^\circ, 90^\circ$), cu 1 unghi ascuțit (de exemplu cele cu unghiurile $60^\circ, 100^\circ, 100^\circ, 100^\circ$), cu 2 unghiuri ascuțite (de exemplu cele cu unghiurile $60^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 120^\circ$) și cu 3 unghiuri ascuțite (de exemplu cele cu unghiurile $80^\circ, 80^\circ, 80^\circ, 120^\circ$). Dacă, prin absurd, un patrulater ar avea toate unghiurile ascuțite, suma lor ar fi mai mică decât $4 \cdot 90^\circ = 360^\circ$, fapt imposibil. În concluzie, mulțimea M poate avea 0, 1, 2 sau 3 elemente.

PROBLEME PROPOSE

1. Se consideră punctele A, B, C, D, E , ca în figura alăturată. Desenați și notați două patrulatere convexe și două patrulatere concave, având vârfurile în câte patru dintre cele cinci puncte. 

2. a) Desenați un patrulater convex $ABCD$.

b) Numiți perechile de laturi opuse ale patrulaterului.

c) Numiți diagonalele patrulaterului.

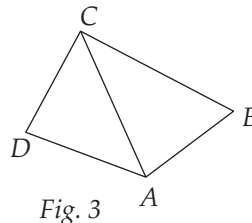
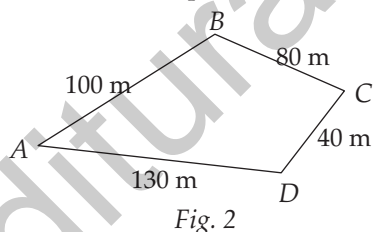
d) Numiti perechile de unghiuri alăturate ale patrulaterului.

3. Alegem, la întâmplare, două dintre unghiurile unui patrulater. Care este probabilitatea ca unghiurile alese să fie opuse?

4. Laturile unui patrulater, exprimate în metri, sunt patru numere naturale consecutive. Aflați lungimile laturilor patrulaterului, știind că perimetrul său este 46 m.

5. Ionuț parcurge traseul $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$ din figura 2. El face 500 de pași. Care este lungimea pasului lui Ionuț?

6. Perimetrul patrulaterului din figura 3 este 100 cm. Perimetrele triunghiurilor ABC și ACD sunt 75 cm, respectiv 8 dm. Aflați lungimea diagonalei AC .



7. Construiți un patrulater convex $ABCD$, știind că triunghiul ABD este isoscel cu $AB = BD = 5$ cm și $AD = 4$ cm, iar triunghiul BCD este echilateral. Calculați perimetrul patrulaterului.

8. Construiți un patrulater convex $ABCD$ care nu are toate unghiurile drepte și:

a) $\angle A = \angle B = 90^\circ$;

b) $\sphericalangle A = \sphericalangle C = 90^\circ$.

9. Construiți un patrulater convex $ABCD$, astfel încât:

a) $\sphericalangle A = 40^\circ$, $\sphericalangle B = 70^\circ$, $\sphericalangle C = 150^\circ$, $\sphericalangle D = ?^\circ$; b) $\sphericalangle A = 100^\circ$, $\sphericalangle B = ?^\circ$, $\sphericalangle C = 120^\circ$, $\sphericalangle D = 20^\circ$.

CAPITOLUL V CERCUL

V.1. PROBLEME RECAPITULATIVE DIN MATERIA CLASEI A VI-A

PROBLEME REZOLVATE

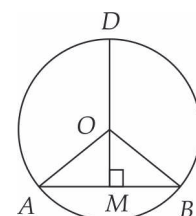
1. O capră C este legată cu o funie lungă de 10 m de un punct O și este situată în interiorul unghiului $\angle AOB$, ca în figura de mai jos din stânga. OA este un gard de 7 m, iar OB un gard de 5 m, pe care capra nu le poate sări. Desenați suprafața de iarbă pe care o poate paște capra.



Soluție: Capra poate paște iarbă din interiorul sfertului de cerc de centru O și rază 10 m, din interiorul semicercului de centru B și rază 5 m și din interiorul semicercului de centru A și rază 3 m, ca în figura de mai sus din dreapta.

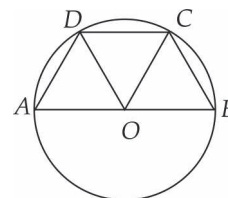
2. Fie A, B două puncte ale cercului $\mathcal{C}(O, R)$. Perpendiculara din O pe AB intersectează cercul $\mathcal{C}(O, R)$ în D (D aparține arcului mare AB). Dacă $\angle OAB = 40^\circ$, aflați măsurile arcelor mici $\widehat{DA}$, $\widehat{DB}$ și $\widehat{AB}$.

Soluție: Fie $DO \cap AB = \{M\}$. Din triunghiul AOM obținem că $\angle AOM = 50^\circ$, deci $\widehat{DOA} = 130^\circ$. Rezultă că măsura arcului $\widehat{AD}$ este 130° și, analog, măsura arcului $\widehat{BD}$ este tot 130° . Cum $\angle AOB = 100^\circ$, măsura arcului $\widehat{AB}$ este 100° .



3. Fie A, B puncte diametral opuse în cercul $\mathcal{C}(O, R)$, iar C și D două puncte pe unul dintre semicercurile determinate de AB , astfel încât arcele $\widehat{BC}$, $\widehat{CD}$ și $\widehat{DA}$ au măsurile egale. Arătați că:

- măsura unghiului $\angle DOC$ este 60° ;
- patrulaterul $ABCD$ este trapez isoscel;
- patrulaterul $BCDO$ este romb.



Soluție: Cum măsura arcului $\widehat{AB}$ este 180° și arcele $\widehat{BC}$, $\widehat{CD}$ și $\widehat{DA}$ sunt egale, fiecare arc va avea 60° .

- a) Măsura unghiului la centru $\angle DOC$ este egală cu măsura arcului $\widehat{DC}$, adică 60° .
 b) Triunghiurile AOD , DOC și COB sunt echilaterale. Din $\angle DCO = \angle COB (= 60^\circ)$ deducem că $DC \parallel AB$, prin urmare $ABCD$ este trapez. Cum $\angle A = \angle B (= 60^\circ)$, trapezul este isoscel.
 c) Patrulaterul $BCDO$ are toate laturile egale, deci este romb.

PROBLEME PROPUSE

- Fie P un punct din planul caietului vostru.
 - Desenați trei cercuri care trec prin P .
 - Câte cercuri situate în planul caietului trec prin punctul P ?
- Fie A și B două puncte (diferite) din planul caietului vostru.
 - Desenați trei cercuri care trec prin A și B .
 - Câte cercuri situate în planul caietului trec prin punctele A și B ? Unde se află centrul acestor cercuri?
- Fie A , B și C trei puncte (diferite) dintr-un plan. Câte cercuri trec prin cele trei puncte, dacă:
 - A , B , C sunt coliniare;
 - A , B , C sunt necoliniare.
- Într-un sat sunt trei case, A , B , C , nesituate în linie dreaptă. Unde trebuie săpată o fântână, astfel încât aceasta să fie egal depărtată de cele trei case?
- O echipă de arheologi a descoperit un amfiteatru de formă circulară. Cum pot afla ei centrul amfiteatrului?
- În cercul $\mathcal{C}(O, r)$ se construiesc două diametre perpendiculare, AC și BD . Arătați că $ABCD$ este pătrat.
- Fie $ABCD$ un pătrat cu centrul în O și $AB = 6$ cm. Stabiliți pozițiile punctelor B , C , D și O față de cercul $\mathcal{C}(A, r)$, unde $r = 6$ cm.
- Fie ABC un triunghi isoscel, cu $AB = AC = 10$ cm și $BC = 16$ cm. Notăm cu D mijlocul lui BC și cu E mijlocul lui AC .
 - Stabiliți pozițiile punctelor B , D și E față de cercul $\mathcal{C}(A, r)$, unde $r = 6$ cm.
 - Stabiliți pozițiile punctelor A , B , C și E față de cercul $\mathcal{C}(D, r)$, unde $r = 6$ cm.
- Fie $ABCD$ un dreptunghi cu laturile $AB = 8$ cm, $AD = 6$ cm și $\{O\} = AC \cap BD$. Stabiliți pozițiile punctelor B , C , D și O față de $\mathcal{C}(A, r)$, unde $r = 6$ cm.
- Desenați, cu ajutorul unei monede, cinci cercuri care trec prin același punct P . Arătați că centrele lor sunt puncte conciclice (se află pe un cerc).
- Fie un segment AB cu lungimea de 3 cm. Notăm cu M și N punctele de intersecție a cercurilor $\mathcal{C}(A, r)$ și $\mathcal{C}(B, r)$, unde $r = 2$ cm (fig. 1).
 - Arătați că $AMBN$ este romb și MN este mediatoarea segmentului AB .

CAPITOLUL VI

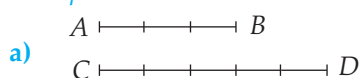
ASEMĂNAREA TRIUNGHIURILOR

VI.1. SEGMENTE PROPORȚIONALE. TEOREMA PARALELELOR ECHIDISTANTE

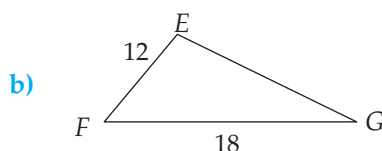


1. Raportul a două segmente este raportul lungimilor lor (exprimate prin aceeași unitate de măsură).

Exemple:



Dacă $AB = 3$ cm și $CD = 5$ cm, atunci raportul segmentelor AB și CD este $\frac{AB}{CD} = \frac{3}{5}$.



Dacă $EF = 12$ mm și $FG = 18$ mm, atunci raportul segmentelor EF și FG este

$$\frac{EF}{FG} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}.$$

2. Șirurile de segmente ($A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, \dots$) și ($C_1D_1, C_2D_2, C_3D_3, \dots$) se numesc (direct) proporționale dacă șirurile lungimilor lor sunt (direct) proporționale, adică:

$$\frac{A_1B_1}{C_1D_1} = \frac{A_2B_2}{C_2D_2} = \frac{A_3B_3}{C_3D_3} = \dots = k.$$

Valoarea comună, k , a acestor rapoarte se numește **factor de proporționalitate**.

Exemplu: Dacă $A_1B_1 = 2$ m, $A_2B_2 = 5$ m, $A_3B_3 = 7$ m, $C_1D_1 = 6$ m, $C_2D_2 = 15$ m, $C_3D_3 = 21$ m, atunci:

$$\frac{A_1B_1}{C_1D_1} = \frac{A_2B_2}{C_2D_2} = \frac{A_3B_3}{C_3D_3} = \frac{1}{3}, \text{ deci } (A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3) \text{ și } (C_1D_1, C_2D_2, C_3D_3) \text{ sunt (direct)}$$

proporționale, iar $k = \frac{1}{3}$ este factorul lor de proporționalitate.

3. Împărțirea unui segment într-un raport dat

Propoziția 1. Există un singur punct interior unui segment care împarte segmentul considerat într-un raport dat.

Exemplu:

$$M \in (AB), \frac{AM}{MB} = \frac{2}{5}$$

Propoziția 2. Există un singur punct exterior unui segment (dar situat pe dreapta suport a segmentului) care împarte segmentul considerat într-un raport dat, diferit de 1.

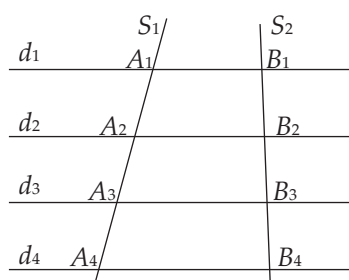
Exemplu:



Observație: Pe dreapta AB există exact două puncte, $M \in (AB)$ și $N \notin [AB]$, astfel încât $\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} = k$, unde $k > 0$, $k \neq 1$. Cele două puncte, M și N , se numesc **puncte conjugate armonice** în raport cu A și B .

4. Teorema paralelelor echidistante

Dacă dreptele paralele $d_1, d_2, \dots, d_n$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$) determină pe o secantă segmente de lungimi egale, atunci ele determină pe orice altă secantă segmente de lungimi egale.



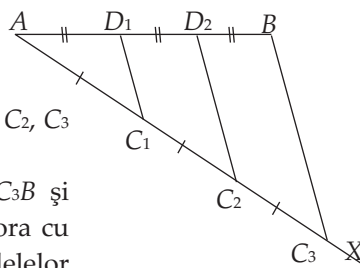
Dacă $d_1 \parallel d_2 \parallel d_3 \parallel d_4$ și $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4$, atunci $B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4$.

5. Împărțirea unui segment în n părți egale ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$)

Să împărțim un segment AB în trei părți egale.

Pentru aceasta, procedăm astfel:

- I. Trasăm o semidreaptă (AX) (cu direcția diferită de AB) și alegem un punct oarecare $C_1 \in AX$.
- II. Construim cu ajutorul unui compas punctele $C_2, C_3 \in (AX)$, astfel încât $AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3$.
- III. Prin punctele C_1 și C_2 ducem paralele la C_3B și notăm cu D_1 , respectiv D_2 intersecțiile acestora cu segmentul AB . Conform teoremei paralelelor echidistante, avem $AD_1 = D_1D_2 = D_2B$.



Procedăm analog pentru a împărți un segment AB în n părți egale ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$).

PROBLEME REZOLVATE

1. Fie un segment AB cu lungimea de 14 cm și un punct $C \in (AB)$, astfel încât $\frac{CA}{CB} = \frac{2}{5}$. Aflați lungimile segmentelor CA și CB (fig. 1).

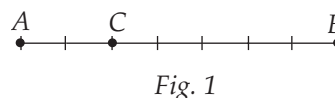


Fig. 1

CAPITOLUL VII

RELAȚII METRICE ÎN TRIUNGHIUL DREPTUNGHIC



VII.1. PROIECȚII ORTOGONALE PE O DREAPTĂ

- Proiecția ortogonală a unui punct pe o dreaptă este piciorul perpendicularei din acel punct pe dreaptă.
- Proiecția ortogonală a unei mulțimi F pe o dreaptă este mulțimea F' a tuturor proiecțiilor punctelor mulțimii F pe acea dreaptă.
- Proiecția unui segment pe o dreaptă este un segment sau un punct.

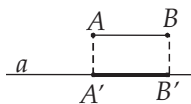
PROBLEMĂ REZOLVATĂ

Fiind dată o dreaptă a și un segment AB , determinați proiecția segmentului AB pe dreapta a .

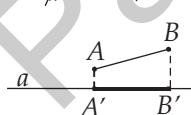
Soluție: Fie A' și B' proiecțiile punctelor A , respectiv B , pe dreapta a . Analizăm situațiile:

I. Segmentul AB nu are puncte comune cu dreapta a .

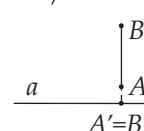
a) $AB \parallel a$;



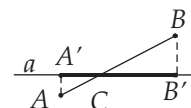
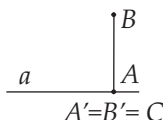
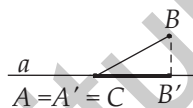
b) $AB \nparallel a, AB \nsubseteq a$;



c) $AB \nparallel a, AB \perp a$.



II. Segmentul AB are un singur punct, C , comun cu dreapta a .

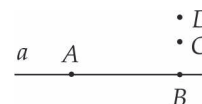


III. Segmentul AB este inclus în dreapta a .



PROBLEME PROPUSE

1. În figura alăturată, punctele A și B sunt pe dreapta a , iar B, C, D sunt coliniare și $BC \perp a$. Găsiți proiecția mulțimii $F = \{A, B, C, D\}$ pe dreapta a .

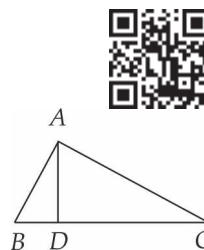


2. Fie $ABCD$ un trapez, $AB \parallel CD$, $AB > CD$. Proiecțiile laturilor neparalele ale trapezului pe dreapta AB au lungimi egale cu 2 cm și, respectiv, 4 cm. Dacă $CD = 6$ cm, determinați lungimea bazei AB .
3. Fie $ABCD$ un pătrat de centru O . Determinați :
 - a) proiecțiile punctului A pe dreptele BD , BC , respectiv AC ;
 - b) proiecțiile segmentului AB pe dreptele AD , respectiv AC ;
 - c) proiecția segmentului AC pe dreapta AB .
4. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A , iar D proiecția punctului A pe BC . Determinați proiecția:
 - a) catetei AC pe ipotenuză; b) ipotenuzei BC pe AB ; c) înălțimii AD pe BC ;
 - d) catetei AB pe AC ; e) catetei AB pe AD .
5. Segmentul AB , având lungimea de 6 cm, formează cu o dreaptă a un unghi de 60° . Aflați lungimea proiecției segmentului AB pe dreapta a .
6. Într-un sistem de coordonate xOy considerăm punctul $A(2, -3)$. Care sunt coordonatele punctelor M și N , proiecțiile punctului A pe Ox , respectiv Oy ?
7. În sistemul de coordonate xOy considerăm punctele $A(1, 3)$ și $B(-2, 1)$. Care sunt lungimile proiecțiilor segmentului AB pe Oy , respectiv Ox ?

VII.2. TEOREMA ÎNĂLȚIMII

Într-un triunghi dreptunghic, lungimea înălțimii din vârful unghiului drept este medie proporțională între lungimile proiecțiilor catetelor pe ipotenuză.

$$\triangle ABC, \sphericalangle BAC = 90^\circ, AD \perp BC, D \in BC \Rightarrow AD^2 = BD \cdot DC.$$



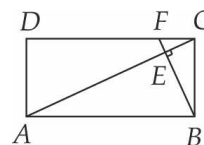
PROBLEME REZOLVATE

1. O grădină are formă de dreptunghi. Construiți o alee BF , $F \in (DC)$, astfel încât $BF \perp AC$. Dacă $\{E\} = AC \cap BF$, $AE = 240$ m și $CE = 60$ m, aflați:

- a) aria terenului; b) lungimea aleii BF .

Soluție: a) Din teorema înălțimii în triunghiul ABC rezultă că $BE^2 = AE \cdot EC$ și de aici obținem $BE = 120$ m. Prin urmare, $\mathcal{A}_{ABCD} = 2 \cdot \mathcal{A}_{ABC} = 36000 \text{ m}^2 = 3,6 \text{ ha}$.

b) Folosind teorema înălțimii în triunghiul BCF , avem $CE^2 = BE \cdot EF$. Rezultă că $EF = 30$ m. Deci, $BF = 150$ m.



2. (Reciproca teoremei înălțimii) Dacă într-un triunghi ABC înălțimea AD (cu D între B și C) este medie proporțională între proiecțiile laturilor AB și AC pe BC , atunci triunghiul este dreptunghic în A .

PROBLEME RECAPITULATIVE

ALGEBRĂ

1. Determinați $\sqrt{x}$, știind că:
a) $x = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13$; b) $x = \frac{5}{9} \cdot \left\{ 1 - \frac{1}{4} \cdot \left[1 - \frac{1}{4} \cdot \left(1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{4} \right) \right] \right\}$.
2. Calculați:
a) $\sqrt{8} + \sqrt{18} - \sqrt{50}$; b) $2\sqrt{27} + 3\sqrt{12} - 10\sqrt{3}$.
3. Fie trei puncte A, B, C , astfel încât $AB = \sqrt{605}$ cm, $BC = \sqrt{180}$ cm și $CA = \sqrt{125}$ cm. Arătați că punctele A, B și C sunt coliniare.
4. Arătați că numărul $a = (\sqrt{50} + 2\sqrt{98} - 3\sqrt{18}) : \sqrt{8}$ este natural.
5. Arătați că $a = (\sqrt{2} + \sqrt{72}) : (\sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{32})$ este număr rațional.
6. Calculați:
a) $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{6}} \right) \cdot \sqrt{6}$; b) $\left(\sqrt{2} + \frac{3}{\sqrt{2}} \right) : (\sqrt{2})^{-1}$.
7. Calculați:
a) $3 \cdot (3,5 - 0,25 \cdot 10) - \left(\sqrt{5} - \frac{2,5}{\sqrt{5}} \right) \cdot \sqrt{5}$; b) $(-1)^9 + 2\frac{1}{2} : \sqrt{0,25} - \frac{20}{\sqrt{300}} + \frac{\sqrt{48}}{6}$.
8. Arătați că numărul $a = \left(\sqrt{3} + \frac{15}{\sqrt{3}} \right) \cdot \sqrt{3} - \left(\sqrt{5} - \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \cdot \sqrt{5} + \left(\frac{3}{2\sqrt{2}} + \frac{2}{3\sqrt{2}} \right) : \frac{1}{\sqrt{72}}$ este cubul unui număr natural.
9. Fie numerele reale $a = \left(\frac{4}{\sqrt{3}} - \frac{7}{\sqrt{2}} \right) \cdot \sqrt{6} + |12 - 7\sqrt{3}|$ și $b = \sqrt{6^2 + 8^2} - \frac{8}{\sqrt{2}}$.
a) Arătați că $a = 4(\sqrt{2} - 3)$.
b) Calculați $(a + b)^{10}$.
10. Fie $a = (\sqrt{8} + \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{27} - \sqrt{3})$ și $b = \sqrt{2} \cdot (\sqrt{12} + 2\sqrt{75}) : (\sqrt{2} + 2\sqrt{8} - \sqrt{18})$. Arătați că numărul $(a\sqrt{2}) : b$ este număr natural.
11. Ordonați crescător numerele reale:
a) $a = 7, b = 4\sqrt{3}, c = 2\sqrt{13}$ și $d = 5\sqrt{2}$; b) $t = -3\sqrt{2}, x = -4, y = -2\sqrt{5}$ și $z = -5$.

INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

PROBLEME RECAPITULATIVE. CLASA A VI-A

ALGEBRĂ

1. $A = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $B = \{0, 1, 4, 9\}$; $A \cup B = \{0, 1, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$; $A \cap B = \{4, 9\}$; $A \setminus B = \{5, 6, 7, 8\}$; $B \setminus A = \{0, 1\}$. 2. $X = \{1, 5, 7, 9, 10\}$ și $Y = \{3, 4, 5, 7, 9\}$. 3. $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B) = 41$. 4. a) $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 5\}$, $\{2, 7\}$, $\{2, 9\}$; b) A are 6 submulțimi cu cinci elemente; c) $2^6 = 64$. 5. $a = 2^3 \cdot 3^2$, $b = 3 \cdot 5^2$, $c = 7 \cdot 13$, $d = 2 \cdot 3 \cdot 23$. Numărul a are cei mai mulți divizori naturali. 6. $n = 12$. 7. $(a; b) = 12$, $[a; b] = 2520$. 8. Cel mai mare divizor comun al celor două numere este $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$. Deci, numerele 126 și 420 au opt divizori comuni. 9. Din relațiile $248 = na + 14$ și $107 = nb + 17$ ($a, b \in \mathbb{N}$, $n > 17$) obținem $234 = na$ și $90 = nb$, deci n este divizor comun al numerelor 234 și 90. Cum $n > 17$, rezultă că $n = 18$. 10. Cel mai mic multiplu comun al numerelor 24 și 36 este 72. Numerele cerute sunt: $72 \cdot 0$, $72 \cdot 1$, $72 \cdot 2$, $72 \cdot 3$ și $72 \cdot 4$. 11. Numărul căutat, n , este cel mai mic multiplu comun al numerelor 8, 12 și 18, deci $n = 72$. 12. Notăm numărul de mere cu m . Din relațiile $m = 3a + 1 = 4b + 1$ ($a, b \in \mathbb{N}^*$) rezultă că $m - 1$ este multiplu de 12, ceea ce, având în vedere că $4m < 100$, ne conduce la concluzia că $m = 13$. 13. a) 21 de băieți; b) 30 de elevi. 14. 2400 lei. 15. a) $\frac{2}{11}$; b) $\frac{3}{4}$. 16. Fie A , B și C măsurile unghiurilor triunghiului considerat. Avem $\frac{A}{1} = \frac{B}{5} = \frac{C}{6} = \frac{A+B+C}{12} = \frac{180^\circ}{12} = 15^\circ$, deci $C = 6 \cdot 15^\circ = 90^\circ$. 17. a) Din relația $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = k$ ($k \in \mathbb{Q}$, $n > 0$) obținem $a = 2k$, $b = 3k$, $c = 4k$, deci $n = 3k \cdot \frac{3}{k} = 9 \in \mathbb{N}$; b) Având în vedere cele stabilite la punctul a), observăm că $\frac{a+c}{2} = \frac{2k+4k}{2} = 3k = b$. 18. Avem $3a = 4b = 6c = k$ ($k \in \mathbb{N}^*$), de unde rezultă că $a = \frac{k}{3}$, $b = \frac{k}{4}$, $c = \frac{k}{6}$ și k este multiplu de 12. Înlocuind în inegalitatea din enunț, obținem $\frac{2k}{3} + \frac{3k}{4} - \frac{4k}{6} < 15$, deci $k < 20$, de unde $k = 12$ (deoarece $k:12$). Deci, $a = 4$, $b = 3$, $c = 2$. 19. Din relațiile $\frac{a}{2} = \frac{b}{3}$ și $b \cdot \frac{1}{6} = c \cdot \frac{1}{2}$ rezultă că $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{1}$. a) Avem $c = \frac{1}{2}a = 50\%a$; b) Înlocuind în egalitatea din ipoteză, obținem $6c^2 + 3c^2 + 2c^2 = 176$, deci $c = 4$ și $a = 8$, $b = 12$. 20. a) Din egalitatea $\frac{\overline{ab}}{5} = \frac{\overline{bc}}{4}$, rezultă că $4\overline{ab} = 5\overline{bc}$, de unde obținem $5 \mid \overline{ab}$, deci $b = 5$ (căci $b \neq 0$); b) Relația $4\overline{ab} = 5\overline{bc}$ este echivalentă cu $8a = 46 + c$, de unde rezultă că $a = 6$, $c = 2$. Avem $\overline{ab} = 65$, $\overline{bc} = 52$. 21. a) 25; 9; b) 7,00. 22. a) $210 - 165 = 45$; b) $p = \frac{26}{100} = \frac{13}{50}$. 23. Deoarece $A = \{102, 111, 120$,

TESTE ÎNȚIALE

Testul 1. I. 1. B. 2. C. 3. B. 4. B. 5. D. 6. A. 7. D. 8. C. II. 1. $x = 3$. 2. $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$. 3. $\angle CBD = 15^\circ$.

4. a) Deoarece triunghiul ABC este echilateral și D este mijlocul lui BC , rezultă că $\angle BAD = \angle DAC = 30^\circ$. Triunghiul AOE este isoscel cu baza AE , căci $OA = OE$ (fiind raze ale cercului considerat), deci $\angle AOE = 180^\circ - 2 \cdot 30^\circ = 120^\circ$. Așadar, arcul mic AE are măsura de 120° . Cum dreapta BC este perpendiculară în D pe raza OD , rezultă că cercul este tangent dreptei BC ; b) Analog, obținem că $m(\angle AOF) = 120^\circ$. Din congruența triunghiurilor AOE și AOF ($AO = AO$, $OE = OF$, $m(\angle AOE) = m(\angle AOF) = 120^\circ$) deducem că $AE = AF$. Deoarece $AE = AF$ și AD este bisectoarea unghiului EAF , rezultă că $AD \perp EF$ și, cum avem și $AD \perp BC$, înseamnă că $BC \parallel EF$.

Testul 2. I. 1. B. 2. C. 3. C. 4. A. 5. C. 6. B. 7. C. 8. B. II. 1. $a = \frac{4}{3}$; $b = 2$; $c = \frac{8}{3}$. 2. $A = \{-2, -1, 0, 1\}$;

$S = -2$; $P = 0$. 3. Ultima cifră a lui N este 3, deci restul cerut este 3. 4. a) În triunghiul isoscel ABC , mediana bazei AM este atât înălțime, cât și bisectoare. Triunghiul AMC este dreptunghic și MN este mediana ipotenuzei, deci $AC = 2MN = 10$ cm; cu teorema lui Pitagora, $AM = 8$ cm. Atunci $\mathcal{P}_{ABC} = 2 \cdot 10 + 12 = 32$ cm; b) Triunghiul APN este isoscel și AM este bisectoarea unghiului din vârf, prin urmare $AM \perp PN$.

Testul 2. I. 1. B. 2. C. 3. B. 4. D. 5. C. 6. A. 7. C. 8. A. II. 1. $a = 7,5$ și $b = 2,5$. 2. 1125 lei. 3. $P = (1 \cdot 24) \cdot (2 \cdot 12) \cdot (3 \cdot 8) \cdot (4 \cdot 6) = (2^3 \cdot 3)^4 = 2^{12} \cdot 3^4$. 4. a) $\angle A = 180^\circ - 2 \cdot \angle B = 108^\circ$; b) Cum $DA = DC$ (D se află pe mediatoarea lui AC), avem $\angle DAC = \angle C = 36^\circ$. Rezultă că $\angle BAD = \angle BAC - \angle DAC = 72^\circ$, $\angle BDA = 180^\circ - \angle B - \angle BAD = 72^\circ$, deci triunghiul BAD este isoscel, cu $BA = BD$.

ALGEBRĂ

CAPITOLUL I. MULȚIMEA NUMERELOR REALE

I.1. Rădăcina pătrată a unui număr natural pătrat perfect. Calculul rădăcinii pătrate a unui număr natural pătrat perfect

1. 121, 144, 169, 196, 225, 400 și 25600. 2. 2^{10} , $2^6 \cdot 3^2$, $2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2$, $3^{22} \cdot 5^{14}$, $2^{2n} \cdot 7^{4n+2}$. 3. $225 = 15^2$, $256 = 16^2$, $289 = 17^2$, $324 = 18^2$, $361 = 19^2$, $400 = 20^2$, $441 = 21^2$ și $484 = 22^2$. 4. a) $25 = 5^2$, $36 = 6^2$, $81 = 9^2$, $100 = 10^2$, $900 = 30^2$; b) $5^4 = (5^2)^2$, $2^6 = (2^3)^2$, $12^{10} = (12^5)^2$, $6^{2n} = (6^n)^2$, $13^{4n+6} = (13^{2n+3})^2$. 5. a) 5^2 ; b) 13^2 ; c) $(2 \cdot 3^3)^2$; d) $(2^5)^2$; e) $(2^3 \cdot 3^4)^2$; f) $(2^5 \cdot 3^4)^2$. 6. a) 12^2 ; b) 25^2 ; c) $(3 \cdot 2^{25})^2$; d) $(2 \cdot 3^{24})^2$. 7. Mulțimea $A = \{0^2, 1^2, 2^2, \dots, 30^2, 31^2\}$ are 32 de elemente. 8. a) Dacă $x \in \mathbb{N}$, atunci $u(x^2) \in \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$; b) Cum $u(5n+2)$, $u(5n+7) \in \{2, 7\}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, rezultă că $5n+2$ și $5n+7$ nu sunt pătrate perfecte. 9. Deoarece $u(3^{45}) = u(3^{44} \cdot 3) = u(81^{11} \cdot 3) = 3$ și $u(2^{62}) = u(2^{60} \cdot 2^2) = u(16^{15} \cdot 4) = 4$, rezultă că $u(a) = 7$, deci a nu este pătrat perfect. 10. a) 2, 8, 9, 14, 50; b) $2 \cdot 3^3$, $2 \cdot 5^3$, $6^2 \cdot 3^4 = 2^2 \cdot 3^6$, $2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$; c) 2^n , 3^{2m} , $2^n \cdot 5^{3m}$, 7^{2n+1} , 2^{3m-2} ; d) $2 \cdot 3^6$; $2^7 \cdot 3$; $2^4 \cdot 3^7$; $3 \cdot 7^{15}$; $2 \cdot 3^{10}$. 11. a) 15, 21, 24; b) 42, 56, 84; c) 102, 225, 254. 12. a) 5; b) 2; c) 5; d) 2; e) 20; f) 80; g) 2; h) 1. 13. a) 6; b) 2; c) 8; d) 12; e) 48; f) 25; g) 13; h) $12 \cdot 7^5$. 14. a) $x = 225$; b) $x = 258$; c) $x =$

Testul 3. 1. O latură a foii are 8 cm ($16 \cdot 0,5$). 2. $n = 15 \in \mathbb{N}$. 3. Cum $\sqrt{500} = 22,36\dots$, înseamnă că $a = 22$ este o aproximare mai bună decât $b = 23$. 4. Deoarece $a = 8 + 3\sqrt{2}$, $b = 8 + 2\sqrt{5}$ și $3\sqrt{2} < 2\sqrt{5}$, rezultă că $a < b$. 5. $x = \frac{25}{6}$. 6. $a = \frac{7}{2} \in \mathbb{Q}$. 7. $x = 7$, $y = -5$. 8. a) $a^2 + b^2 = 8$ și $a \cdot b = 1$; b) $x^2 = 6 \in \mathbb{N}$ și $x + \sqrt{6} = 0 \in \mathbb{N}$.

CAPITOLUL II. ECUAȚII ȘI SISTEME DE ECUAȚII LINIARE

II.1. Transformarea unei egalități într-o egalitate echivalentă. Identități

2. 68. 3. 25. 4. a) $3a + 2 = 5b \mid -3 \Rightarrow 3a - 1 = 5b - 3$; b) $3a + 2 = 5b \mid :15 \Rightarrow \frac{a}{5} + \frac{2}{15} = \frac{b}{3}$; c) $3a + 2 = 5b \mid \cdot b \Rightarrow 3ab + 2b = 5b^2$; d) $3a + 2 = 5b \mid \cdot 3a \Rightarrow 9a^2 + 6a = 15ab$. 5. 0. 6. -2 ; $-\frac{1}{2}$; $\frac{5}{6}$. 7. -1 . 8. $\frac{2}{3}$. 9. $-\frac{11}{14}$. 10. Este falsă: $3 \cdot 4 = 2 \cdot 6$ și $3 \neq 2$, $4 \neq 6$. 11. 34. 12. 30. 14. 50; -45 ; 0. 15. Scăzând egalitățile date, obținem $a - c = 2c - 2a$, deci $a = c$, apoi $b = 2c - a = a$. 16. Din $\frac{a}{b} = \frac{d}{c} = \frac{a+d}{b+c} = 1$ rezultă $a = b$, $d = c$. 17. a) $|2| = |-2|$ și $2 \neq -2$; b) Din $a \cdot b \geq 0$ rezultă $a \geq 0$ și $b \geq 0$ sau $a \leq 0$, $b \leq 0$. În primul caz, din $|a| = |b|$ rezultă $a = b$, iar în al doilea caz, rezultă $-a = -b$, deci $a = b$. 21. Deoarece $a + b + c = 0$, rezultă că $a^2 + ab + ac = a(a + b + c) = 0$.

II.2. Ecuații de forma $ax + b = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$. Mulțimea soluțiilor unei ecuații.

Ecuații echivalente

2. a) $x - 2 = 0$; b) $4x + 3 = 0$; c) $5x - 2 = 0$; d) $6x + 1 = 0$. 3. a) $x = 2$; b) $x = 2$; c) $x \in \emptyset$; d) $x \in \emptyset$; e) $x = 20$; f) $x = -\frac{1}{5}$. 4. a) $\frac{3}{5}$; b) 3; c) 3; d) 8; e) 0; f) 3; g) 6; h) $\frac{2}{3}$. 5. a) 3; b) -4 ; c) 3; d) -1 . 6. a) 1; b) -3 ; c) 1; d) $\frac{6}{7}$. 7. a) $\frac{5}{14}$; b) 0; c) 2; d) -2 . 8. a) 4; b) 1; c) -3 ; d) $\frac{7}{20}$. 9. a) 2; b) 1; c) $\sqrt{2}$; d) $\sqrt{6}$. 10. a) $x = -2$; b) $x = -1$; c) $x = 3$; d) $x = -5$; e) $x = 5$. 11. a) -6 ; b) -4 ; c) -2 ; d) 4. 12. $A = \{5\}$; $B = \left\{\frac{1}{6}\right\}$; $A \cup B = \left\{\frac{1}{6}, 5\right\}$; $A \cap B = \emptyset$. 13. Cum $A = \{2\}$, avem $B = \{2\}$ dacă și numai dacă $(a + 2) \cdot 2 - a = 1$, deci $a = -3$. 14. $4x - 1 \in \{-21, -7, -3, -1, 1, 3, 7, 21\}$; $A = \{-5, 0, 1, 2\}$. 15. $x = \frac{2}{a-1}$, $a - 1 \in \{1, 2\}$, deci $a \in \{2, 3\}$. 16. a) $x = 1$; b) $x = 2$. 17. Ecuațiile au soluția $x = -\frac{1}{7}$. 18. a) $a = 3$; b) $a = 2$. 19. $(a, b) \in \{(-2, -4); (-14, 0); (28, 1); (7, 2); (4, 3); (1, 10)\}$. 20. $(a, b) \in \{(-2, -2); (-1, -10); (0, 14); (1, 6)\}$. 21. a) $x = 6$; b) $x = 3$.

II.3. Sisteme de două ecuații liniare cu două necunoscute

1. $\left(-1, -\frac{1}{5}\right)$; $(2, 1)$; $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$. 2. a) $y = 1$; b) $x = -3$; c) $y = -1$; d) $x = -11$. 3. Cum $x = -y - \frac{2(y-1)}{5}$, alegem y astfel încât $y - 1$ să se dividă cu 5. Avem $(-1, 1)$, $(6, -4)$, $(-8, 6)$.

GEOMETRIE

CAPITOLUL IV. PATRULATERUL

IV.1. Patrulaterul convex

3. $\frac{1}{3}$. 4. 10 m, 11 m, 12 m, 13 m. 5. Lungimea traseului este 350 m, iar lungimea pasului este 70 cm. 6. 27,5 cm. 7. $\mathcal{P}_{ABCD} = 19$ cm. 10. $\angle A = 150^\circ$; $\angle B = 45^\circ$; $\angle C = 105^\circ$; $\angle D = 60^\circ$. 11. 90° . 12. 36° ; 72° ; 108° ; 144° . 13. 144° ; 96° ; 72° ; 48° . 14. a) Fie $ABCDE$ un pentagon. Trasăm diagonalele AC și AD . Avem $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E = (\angle BAC + \angle B + \angle BCA) + (\angle CAD + \angle ACD + \angle ADC) + (\angle DAE + \angle ADE + \angle E) = 180^\circ + 180^\circ + 180^\circ = 540^\circ$; b) Analog, obținem rezultatul 720° . 15. Se aplică teorema lui Pitagora în $\triangle BCD$ și în $\triangle ABD$. Obținem: $BD = 12$ cm, $AD = 9,6$ cm, $\mathcal{P}_{ABCD} = 34,8$ cm. 16. Se aplică teorema lui Pitagora în triunghiurile AOB , BOC , COD , DOA . Obținem: $AB = AD = 13$ cm, $BC = CD = 20$ cm; $\mathcal{P}_{ABCD} = 66$ cm. 17. Punctele A și C sunt egal depărtate de capetele segmentului BD , deci se află pe mediatoarea acestuia. 18. În $\triangle ABC$, mediana BM este egală cu jumătate din latura pe care cade, prin urmare $\angle B = 90^\circ$. Analog, $\angle D = 90^\circ$. 19. a) Punctele A și C se află pe mediatoarea lui BD , deci $AB = AD$ și $CB = CD$. Aplicăm L.L.L.; b) Triunghiurile OAB și BAC sunt $90^\circ-60^\circ-30^\circ$, deci $AO = \frac{1}{2} AB = 3$ cm, $AC = 2AB = 12$ cm. Obținem că $OC = 9$ cm. 20. a) $\triangle ABC$ este echilateral, deci $\angle BAC = 60^\circ$, de unde $\angle CAD = 45^\circ$. Din $\angle CAD = \angle CDA = 45^\circ$ obținem că $AC = CD$; b) Avem $BC = AC = CD$, așadar $\triangle BCD$ este isoscel, cu unghiul din vârf $\angle C = 150^\circ$. Găsim că $\angle DBC = 15^\circ$. 21. Notăm $\angle BAP = \angle PAD = a$, $\angle B = \angle D = b$, $\angle BCQ = \angle QCD = c$; atunci $2a + 2b + 2c = 360^\circ$, deci $a + b + c = 180^\circ$. Unghiul $\angle APC$ este exterior triunghiului APD , așadar $\angle APC = a + b$. Deducem că $\angle QCP + \angle APC = c + (a + b) = 180^\circ$, prin urmare $AP \parallel CQ$.

IV.2. Paralelogramul

1. 1200 m. 2. $AD = 5$ cm, $AB = CD = 10$ cm. 3. 10 dm. 4. $\angle C = 48^\circ$, $\angle B = \angle D = 132^\circ$. 5. $\angle A = \angle C = 108^\circ$, $\angle B = \angle D = 72^\circ$. 6. a) $\angle A = \angle C = 45^\circ$, $\angle B = \angle D = 135^\circ$; b) $\angle A = \angle C = 100^\circ$, $\angle B = \angle D = 80^\circ$. 7. $AC = 8$ cm, $BD = 6$ cm. 8. $\angle AOB = 100^\circ$; $\angle BDC = 50^\circ$; $\angle A = 70^\circ$; $\angle B = 110^\circ$. 9. $BC = 5$ cm, $AB = CD = 10$ cm, $\angle C = 60^\circ$, $\angle B = \angle D = 120^\circ$. 10. a) D este simetricul lui B față de mijlocul lui AC ; b) D este simetricul lui A față de mijlocul lui BC . 13. Avem $\angle BMP = \angle C$ (alt. int.) $\Rightarrow \angle BMP = \angle B \Rightarrow PM = PB$ și, analog, $NM = NC$. Atunci $\mathcal{P}_{APMN} = AP + PM + NM + AN = AP + PB + CN + AN = AB + AC = 20$ cm. 14. Notăm $PN \cap CD = \{S\}$; atunci $MNSD$ și $PQRS$ sunt paralelograme, deci $MN + PQ = DS + SR = DR$, iar $NP + QR = NP + PS = NS = MD$, de unde rezultă concluzia. 15. Fie AP și BP bisectoare ale unghiurilor $\angle A$ și $\angle B$ ale paralelogramului $ABCD$. Avem $\angle PAB + \angle PBA = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B) = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ$, de unde $\angle APB = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$. Fie AE și CF bisectoarele unghiurilor $\angle C$, respectiv $\angle D$, $E \in DC$, $F \in AB$. Avem $\angle DEA = \angle EAB = \frac{1}{2}(\angle A) = \frac{1}{2}(\angle C) = \angle DCF$, deci $AE \parallel CF$. 16. Fie AP și BP cele două bisectoare, cu $P \in CD$. Cum $\angle DPA = \angle PAB$ (alt. int.) și $\angle PAB = \angle PAD$, deducem că $DA = DP$. Analog, $CP = CB$. Obținem $\mathcal{P}_{ABCD} = 21$ cm. 17. a) Segmentele CD și EF sunt paralele și egale; b) Folosim

având în vedere că $OP + PQ = 30$, obținem $OP = 5$ cm și $PQ = 25$ cm. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiurile OAP și QBP , găsim $PA = 4$ cm și $PB = 20$ cm, deci $AB = 24$ cm.

CAPITOLUL VII. RELAȚII METRICE ÎN TRIUNGIUL DREPTUNGHIC

VII.1. Proiecții ortogonale pe o dreaptă

1. $F' = \{A, B\}$. 2. $AB = 12$ cm sau $AB = 8$ cm. 3. a) O ; B ; A ; b) A ; segmentul AO ; c) segmentul AB . 4. a) segmentul CD ; b) segmentul AB ; c) punctul D ; d) punctul A ; e) segmentul AD . 5. 3 cm. 6. $M(2, 0)$; $N(0, -3)$. 7. 3, respectiv 2.

VII.2. Teorema înălțimii

1. a) $AD = 6$ cm; $BC = 13$ cm; b) $BC = 25$ cm; c) $AD = 12$ m, $BD = 9$ m. 2. a) $AD = 2,4$ m; $BC = 8$ m; b) $AD = 10,5$ cm, $DC = 31,5$ cm; c) $BD = 6,75$ cm. 3. a) $AD = 6$ cm; b) $CD = 2$ cm; c) $BC = 12$ cm. 4. 30 m. 5. 150 cm^2 . 6. $AD = \sqrt{440} \text{ m} < \sqrt{441} \text{ m} = 21 \text{ m}$. 7. 12 cm; 156 cm^2 . 8. $AE = 12$ cm, $EF = 27$ cm. 9. Fie $AE \perp DC$ și $BF \perp DC$, $E, F \in DC$; atunci $AE = FC = 6$ cm, $BF = 12$ cm, $\mathcal{A}_{ABCD} = 288 \text{ cm}^2$. 10. $\mathcal{A}_{ABC} = 2\sqrt{3} \text{ cm}^2$ și $3,4 < 2\sqrt{3} < 3,5 \Leftrightarrow 1,7 < \sqrt{3} < 1,75$, adevărat. 11. a) $AC \parallel DE$ și $DC \parallel AE$; b) $DE \parallel AC$, $AC \perp BD \Rightarrow DE \perp BD$; c) $AD^2 = AE \cdot AB \Rightarrow AD = 6$ cm; $\mathcal{A}_{ABCD} = \frac{(AB+CD) \cdot AD}{2} = 39 \text{ cm}^2$. 12. AD este înălțime în $\triangle ABC$, D este între B și C , iar $AD^2 = BD \cdot DC$, deci $\triangle ABC$ este dreptunghic în A . 13. Dacă AB și AC ar fi perpendiculare, atunci ar trebui ca $AD^2 = BD \cdot CD$, fals. 14. $\angle ABC > \angle ADC = 90^\circ$, deci triunghiul ABC nu este dreptunghic. Nu putem aplica reciproca teoremei înălțimii, deoarece D nu este între B și C .

VII.3. Teorema catetei

1. a) $AB = 15$ cm, $AC = 20$ cm; b) $CD = 9$ cm, $AC = 6\sqrt{3}$ cm; c) $AB = 3\sqrt{5}$ cm. 2. a) $AB = 21$ cm, $AC = 28$ cm; b) $DC = 19,2$ cm, $AC = 24$ cm; c) $BD = \frac{27}{200}$ m, $AB = \frac{9}{40}$ m. 3. a) $AB = 6\sqrt{2}$ cm; $AC = 3\sqrt{10}$ cm; b) $CD = 2$ cm, $AC = 4$ cm; c) $BD = 4\sqrt{3}$ cm, $AB = 2\sqrt{15}$ cm. 4. $BD = 24$ cm, $AC = 6\sqrt{5}$ cm; $AB = 12\sqrt{5}$ cm. 5. $BC = 36$ cm, $AD = 8\sqrt{2}$ cm, $AC = 24\sqrt{2}$ cm. 6. $CD = 8$ cm, $AC = 4\sqrt{13}$ cm, $AB = 6\sqrt{13}$ cm. 7. $10\sqrt{13}$ cm. 8. Dacă $DF \perp AB$, $CE \perp AB$, $E, F \in AB$, atunci $AF = EB = 4$ cm, $CE = 6$ cm, $BC = 2\sqrt{13}$ cm. $\mathcal{P}_{ABCD} = (4\sqrt{13} + 18)$ cm; $\mathcal{A}_{ABCD} = 54 \text{ cm}^2$. 9. $AE = 2$ cm, $BE = 1$ cm, $BD = \sqrt{3}$ cm, $CD = 2\sqrt{3}$ cm, $AC = 3\sqrt{2}$ cm. 10. $BC = 20$ cm. 11. $BD = 2$ cm, $DC = 3$ cm, $AD = \sqrt{6}$ cm, $AC = \sqrt{15}$ cm. 12. $AC = 2 \cdot AO = 40$ cm, $BD = 2 \cdot OB = 30$ cm. 13. $BD = 16$ cm, $CD = 9$ cm, $AD = 12$ cm, $DE = \frac{27}{4}$ cm, $CE = \frac{45}{4}$ cm. 14. Din $AB^2 = BD \cdot BC$ rezultă $\angle BAC = 90^\circ$; $AC = 3\sqrt{5}$ cm. 15. Ducem $AD \perp BC$, D mijlocul lui BC . Din $AC^2 = CD \cdot CE$ rezultă $CE = 50$ cm. Astfel, $ED = 32$ cm și atunci din $AD^2 = ED \cdot DC$ obținem $AD = 24$ cm. De asemenea, $AE^2 = ED \cdot EC$, deci $AE = 40$ cm. Rezultă $\mathcal{A}_{ABC} = 432 \text{ cm}^2$ și $\mathcal{P}_{ACE} = 120$ cm. 16. a) AE este diametru; b) $R = 6,25$ cm. 17. $\triangle ABC$ este dreptunghic în C . Deducem $AC = 15$ cm, $BC = 20$ cm. $\mathcal{P}_{ABC} = 60$ cm, $\mathcal{A}_{ABC} = 150 \text{ cm}^2$. 18. $\mathcal{P}_{ACB} = 70$ cm, $\mathcal{A}_{OACB} = 300 \text{ cm}^2$. 19. $OM^2 = MN \cdot MP$ și folosim reciproca teoremei înălțimii. 20. a) Observăm că $OC^2 = OM \cdot OB$ și din reciproca

Cuprins

CUVÂNT-ÎNAINTE	5
----------------------	---

PROBLEME RECAPITULATIVE CLASA A VI-A

ALGEBRĂ.....	7
GEOMETRIE	11
TESTE ÎNITIALE	15

ALGEBRĂ

CAPITOLUL I. MULȚIMEA NUMERELOR REALE

I.1. Rădăcina pătrată a unui număr natural pătrat perfect. Calculul rădăcinii pătrate a unui număr natural pătrat perfect.....	19
I.2. Rădăcina pătrată a pătratului unui număr rațional	23
I.3. Numere iraționale, exemple, estimări. Mulțimea numerelor reale. Incluziunile $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$	26
I.4. Compararea și ordonarea numerelor reale. Reprezentarea numerelor reale pe axă prin aproximări	31
I.5. Modulul unui număr real	33
I.6. Reguli de calcul cu radicali. Scoaterea și introducerea factorilor sub radical	36
I.7. Adunarea și scăderea numerelor reale	39
I.8. Înmulțirea și împărțirea numerelor reale. Raționalizarea numitorilor de forma $a\sqrt{b}$	42
I.9. Puterea cu exponent întreg a unui număr real	46
I.10. Ordinea efectuării operațiilor cu numere reale	48
I.11. Media aritmetică ponderată a n numere reale, $n \geq 2$	55
I.12. Media geometrică a două numere reale pozitive	57
I.13. Ecuații de forma $x^2 = a$, unde $a \in \mathbb{R}$	59
Recapitulare și sistematizare prin teste.....	61

CAPITOLUL II. ECUAȚII ȘI SISTEME DE ECUAȚII LINIARE

II.1. Transformarea unei egalități într-o egalitate echivalentă. Identități	63
II.2. Ecuații de forma $ax + b = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$. Mulțimea soluțiilor unei ecuații. Ecuații echivalente	65
II.3. Sisteme de două ecuații liniare cu două necunoscute	68
II.4. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor sau al sistemelor de ecuații liniare	72
Recapitulare și sistematizare prin teste.....	75

CAPITOLUL III. ELEMENTE DE ORGANIZARE A DATELOR

III.1. Date statistice – recapitulare și completări. Poligonul frecvențelor	77
III.2. Sistem de axe ortogonale în plan. Reprezentarea punctelor într-un sistem de axe ortogonale	84
III.3. Distanța dintre două puncte din plan	88
III.4. Produsul cartezian a două mulțimi nevide. Reprezentarea într-un sistem de axe ortogonale a unor perechi de numere reale	92
III.5. Reprezentarea și interpretarea unor dependențe funcționale prin tabele, diagrame și grafice	96
Recapitulare și sistematizare prin teste	101

GEOMETRIE

CAPITOLUL IV. PATRULATERUL

IV.1. Patrulaterul convex	104
IV.2. Paralelogramul	107
IV.3. Aplicații ale paralelogramului în geometria triunghiului: linia mijlocie în triunghi, centrul de greutate al unui triunghi	111
IV.4. Dreptunghiul	114
IV.5. Rombul	117
IV.6. Pătratul	120
IV.7. Trapezul. Linia mijlocie în trapez	123
IV.8. Trapezul isoscel	127
IV.9. Arii	129
Recapitulare și sistematizare prin teste	137

CAPITOLUL V. CERCUL

V.1. Probleme recapitulative din materia clasei a VI-a	139
V.2. Coarde și arce în cerc. Proprietăți	142
V.3. Unghi înscris în cerc	146
V.4. Tangente dintr-un punct exterior la un cerc	149
V.5. Poligoane regulate înscrise într-un cerc. Definiție, desen	153
V.6. Lungimea cercului și aria discului	155
Recapitulare și sistematizare prin teste	160

CAPITOLUL VI. ASEMĂNAREA TRIUNGHURIILOR

VI.1. Segmente proporționale. Teorema paralelelor echidistante	162
VI.2. Teorema lui Thales. Împărțirea unui segment în părți proporționale cu numere (segmente) date	167
VI.3. Reciproca teoremei lui Thales	173
VI.4. Triunghiuri asemenea. Teorema fundamentală a asemănării	177
VI.5. Criterii de asemănare a triunghiurilor	180

VI.6. Aplicații. Raportul ariilor a două triunghiuri asemenea. Aproximarea în situații practice a distanțelor folosind asemănarea	185
Recapitulare și sistematizare prin teste	191

CAPITOLUL VII. RELAȚII METRICE ÎN TRIUNGHIUL DREPTUNGHIIC

VII.1. Proiecții ortogonale pe o dreaptă	193
VII.2. Teorema înălțimii.....	194
VII.3. Teorema catetei	196
VII.4. Teorema lui Pitagora. Reciproca teoremei lui Pitagora.....	199
VII.5. Noțiuni de trigonometrie în triunghiul dreptunghic: sinusul, cosinusul, tangenta și cotangenta unui unghi ascuțit.....	202
VII.6. Rezolvarea triunghiului dreptunghic	205
VII.7. Calculul elementelor (latură, apotemă, arie, perimetru) în triunghiul echilateral, în pătrat și în hexagonul regulat.....	209
Recapitulare și sistematizare prin teste.....	212

PROBLEME RECAPITULATIVE

ALGEBRĂ	214
GEOMETRIE.....	219

INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI	225
--------------------------------------	-----